Jevy geometrické a vlnové optiky pomocí centimetrových vln

Jméno: Milan Ševčík
Datum měření: 27.3.2013

Měřící potřeby

- Gunnova dioda s vysílací trychtýřovou anténou
- napájecí zdroj pro Gunnovu diodu
- přijímací anténa
- polovodičová dioda jako detektor
- voltmetr
- příslušenství pro měření odrazu, lomu, interference,…

Obecná část

Pro šíření vlnění všeho druhu platí zákony odrazu, lomu a vztahy po interferenci vlnění.

Zákon odrazu: $\alpha=\alpha'$

Zákon lomu: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{c_1}{c_2}$

Při interferenci dvou protisměrných vlnění o stejné frekvenci a u příčného vlnění o totožné kmitové rovině vzniká stojaté vlnění, u kterého vznikají kmitny a uzly. Vzdálenost mezi 2 sousedními uzly a 2 sousedními kmitnami je rovna polovině vlnové délky. Mezi vlnovou délkou, frekvencí vlnění, periodou a rychlostí šíření platí vztah:

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=cT$$

Pokud dopadá postupně vlnění (o vlnové délce λ) na tenkou vrstvu (tloušťka d) vhodného prostředí, částečně se odráží a částečně touto tenkou vrstvou prochází. Intenzita odraženého vlnění je určena optickým dráhovým rozdílem paprsků, pro který platí vztah:

$\delta=2\mathrm{d}\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2\alpha}$, kde n_1 a n_2 jsou poměry indexů lomu jednotlivých prostředí.

Všechny výše uvedené jevy jsou obvykle pozorovány za použití viditelného světla. Pokud využijeme vlnění s mnohem kratšími vlnovými délkami, můžeme studovat jevy difrakce na krystalech pevných látek.

V krystalické mřížce jsou atomy rozmístěny pravidelně v rovnoběžných rovinách o mezirovinné vzdálenosti d. Maximum intenzity dopadajícího záření pozorujeme ve směrech, které jsou dány Braggovou rovnicí:

$2\mathrm{d}\sin\nu=n\lambda$, kde $n=1,2,3,\ldots$ je celé.

Úhel ν se nazývá Braggův úhel a na rozdíl od optiky, kde úhly měříme od normály, udává odklon paprsků od roviny atomů.

Obvykle čísla n neznáme, proto se při dalších výpočtech pokládají rovna jedné a předpstavujeme si v krystalu další roviny se zlomkem základní mezirovinné vzdálenosti.

Postup měření

A) Měření vlnové délky pomocí stojatého vlnění

Plnou kovovou desku zasuneme do otvorů na pravém okraji základní desky. Táhla, jež spojují tyče nesoucí trychtýřové antény, odpojíme. Tyč vysílací antény nastavíme ke značce 0° a tyč s přijímací anténou odkloníme, aby nepřekážela. Odrazem vlnění od kovové desky pod úhlem dopadu 0°

se vytvoří v prostoru mezi deskou a vysílací anténou stojaté vlny. Jako indikátor použijeme křemíkovou diodu na posuvném stojánku. Její vývody připojíme k voltmetru. Pomalým posouváním stojánku s diodou hledáme polohy minim intenzity elektrického pole. Polohy odečítáme na měřítku, které je připevněno na základní desce. Neměříme v těsné blízkosti odrazné desky. Naměřené polohy zaznamenáme do tabulky a vyhodnotíme vlnovou délku λ včetně chyby.

B) Zákon odrazu

Pro odraz vln použijeme opět kovovou desku, kterou přemístíme do otvorů ve středu úhloměrné stupnice. Trychtýřovou přijímací anténu připojíme k voltmetru a tyčí vysílací antény nastavíme jeden pevný úhel dopadu vlnění α (z intervalu 30° až 50°). Pak měříme závislost napětí $U\,[\mathrm{mV}]$ z přijímací antény na úhlu odrazu α' v rozmezí $20° \div 70°$ s krokem maximálně 5°. Úhel měříme od kolmice. Naměřenou závislost graficky zpracujeme.

C) Zákon lomu

Nejprve stanovíme velikost lámavého úhlu. Tento úhel je vyznačen ryskami na plexisklovém stojánku (vrchol úhlu je v otvoru). Postavíme tedy stojánek bez hranolu tak, aby jedno z ramen úhlu směřovalo k rysce 0° úhloměrné stupnice a odečteme úhel. Pro další měření pak usadíme hranol pomocí stojánku do středu úhloměrné stupnice tak, aby osa lámavého úhlu φ hranolu směřovala k rysce 90° na úhloměru. Paprsek, který se láme na obou lámavých stěnách, je po výstupu z hranolu odchýlen od původního směru o úhel δ. Úhel δ je nejmenší (pak se nazývá minimální deviace δ_m), prochází-li paprsek hranolem souměrně k oběma lámavým stěnám ($\alpha=\alpha'$). Index lomu hranolu je pak dán vztahem:

$$n=\frac{\sin\left(\frac{\varphi+\delta_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

Pro určení minimální deviace spřáhneme obě tyče nesoucí antény dvěma pomocnými táhly s posuvným jezdcem na střední vodicí tyči. Pak za souměrného rozevírání obou tyčí hledáme polohu maximálního příjmu signálu. Pomocí úhloměru stanovíme deviaci δ_m pro výše uvedený vzorec. Po stanovení indexu lomu n stanovíme pomocí vztahu pro zákon lomu rychlost šíření elektromagnetických vln v materiálu, ze kterého je hranol vyroben. Jako rychlost šíření elektromagnetických vln ve vzduchu vezmeme $c_1 \simeq 3{,}10^8\,\mathrm{ms}^{-1}$.

D) Interference na tenké vrstvě

Jev proměříme pomocí dvou destiček z plexiskla. Tenkou vrstvou bude vzduch mezi oběma destičkami ($n \simeq 1$). Podmínkou maxima odraženého vlnění je potom :

$$2\mathrm{d}\sqrt{1-\sin^2\alpha}=k\lambda \quad (k=1,2,3,\ldots),$$

kde d je vzdálenost destiček, λ je vlnová délka a α je úhel dopadu.

Jednu destičku umístíme do středu úhloměrné stupnice a druhou rovnoběžně za ní do pohyblivého držáku. Použijeme opět trychtýřovou přijímací anténu. Tyče jsou stále spřaženy táhly. Úhly dopadu a odrazu nastavíme asi na 30° (měřeno od kolmice). Postupným posouváním druhé destičky hledáme takovou její polohu, při níž v odraženém vlnění nastává maximum. Nalezneme-li alespoň dvě takové sousední polohy $x_1 < x_2$, pak dvojím použitím předchozího vztahu dostaneme:

$$2(x_2-x_1)\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\lambda,$$

neboť v sousedních polohách se čísla k liší o jedničku. Výše uvedený vztah nám umožňuje vypočíst vlnovou délku λ. Měření provedeme pokud možno pro několik sousedních poloh. Pokud nelze získat alespoň dvě polohy, zmenšíme úhel dopadu. Výsledek porovnáme s měřením podle bodu A.

E) Model krystalové mřížky

Model krystalové mřížky umístíme do středu úhloměrné stupnice tak, aby spojnice nulových bodů této stupnice byla rovnoběžná s jednou dvojicí stran čtverce (model v základní poloze) . Tyče jsou stále spřaženy táhly. Vysílací a přijímací anténu nastavíme do polohy asi 12°. Při tomto a menších úhlech přijímá anténa vlny přímo z vysílače. Úhly postupně zvětšujeme tak, že pohybujeme velmi pomalu oběma táhly současně a hledáme maxima příjmu po odrazu od drátů a interferenčním zesílení. Ke každé hodnotě přísluší podle Braggovy rovnice celé číslo n . Pro sousední polohy se čísla n liší o jednotku.

Pootočíme-li model o 45°, můžeme proměřovat odrazy na reflexních rovinách (110) , (220) atd.

Z Braggovy rovnice pro $n=1$ pak získáme různé mezirovinné vzdálenosti d_i . K nim určíme příslušné Millerovy indexy (hkl) . U našeho modelu stanovíme indexy přímo ze znalosti jeho uspořádání. Mřížkovou konstantu u kubické mřížky obdržíme ze vztahu:

$$a=d_i\sqrt{h^2+k^2+l^2}\ .$$

Pracovní úkol

1) Proveďte a vyhodnoťte měření podle bodů A až E.
2) Porovnejte vlnové délky zjištěné při měření A a D a rozhodněte, které měření je přesnější a proč.
3) Mřížkové konstanty získané ze vztahu porovnejte se skutečnou hodnotou změřenou mm měřítkem.

Naměřené hodnoty a zpracování výsledků

A) Měření vlnové délky pomocí stojatého vlnění

λ_i[cm]	1,3	2,9	4,3	6,0	7,6	9,2	10,8	12,4	14,0

$$k=4$$

$$\Lambda_1=\lambda_{k+1}-\lambda_1=7{,}6-1{,}3=6{,}3\,\text{cm}$$

$$\Lambda_2=\lambda_{k+2}-\lambda_2=9{,}2-2{,}9=6{,}3\,\text{cm}$$

$$\Lambda_3=\lambda_{k+3}-\lambda_3=10{,}8-4{,}3=6{,}5\,\text{cm}$$

$$\Lambda_4=\lambda_{k+4}-\lambda_4=12{,}4-6{,}0=6{,}4\,\text{cm}$$

$$\bar{\Lambda}=\frac{\sum\Lambda_i}{k}=\frac{(6{,}3+6{,}3+6{,}5+6{,}4)}{4}=6{,}375\,\text{cm}$$

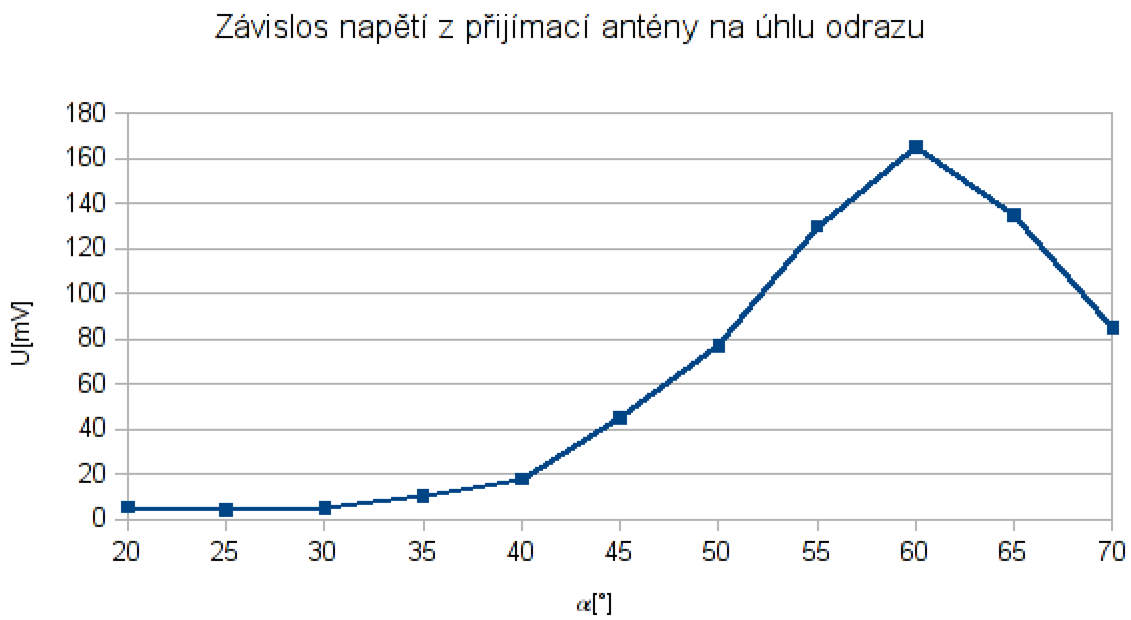
$$\sigma_{\bar{\Lambda}}=\sqrt{\frac{\sum(\bar{\Lambda}-\Lambda_i)^2}{k(k-1)}}=\sqrt{\frac{0{,}005625+0{,}005625+0{,}015625+0{,}000625}{12}}=\sqrt{\frac{0{,}0275}{12}}=0{,}048$$

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{\bar{\Lambda}}{k}\pm\frac{\sigma_{\bar{\Lambda}}}{k}=\frac{6{,}375}{4}\pm\frac{0{,}048}{4}\qquad\lambda=3{,}19\pm0{,}02\,\text{cm}$$

B) Zákon odrazu

$\alpha = 60°$

α' [°]	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
U [mV]	5,5	4,0	5,0	10,5	18,0	45,0	77,0	130,0	165,0	135,0	85,0



C) Zákon lomu

	Plexisklo	Parafín	Textgumoid
δ_m [°]	42	36	58
n	1,67	1,56	1,87
$c_2 [ms^{-1}]$	$1,80\cdot 10^8\,ms^{-1}$	$1,92\cdot 10^8\,ms^{-1}$	$1,60\cdot 10^8\,ms^{-1}$

$\varphi = 52°$

$$n_{Plexisklo} = \frac{\sin\frac{\varphi+\delta_m}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\frac{52+42}{2}}{\sin\frac{52}{2}} = 1,67 \qquad c_2 = \frac{c_1}{n} = \frac{3\cdot 10^8}{1,67} = 1,80\cdot 10^8\,ms^{-1}$$

$$n_{Parafín} = \frac{\sin\frac{\varphi+\delta_m}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\frac{52+36}{2}}{\sin\frac{52}{2}} = 1,56 \qquad c_2 = \frac{c_1}{n} = \frac{3\cdot 10^8}{1,56} = 1,92\cdot 10^8\,ms^{-1}$$

$$n_{Textgumoid} = \frac{\sin\frac{\varphi+\delta_m}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\frac{52+58}{2}}{\sin\frac{52}{2}} = 1,87 \qquad c_2 = \frac{c_1}{n} = \frac{3\cdot 10^8}{1,87} = 1,60\cdot 10^8\,ms^{-1}$$

D) Interference na tenké vrstvě

x_1 [cm]	3,0
x_2 [cm]	4,9

$\alpha = 30°$

$$\lambda = 2(x_2 - x_1)\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 2(4{,}9-3{,}0)\cdot\sqrt{1-\sin^2 30°} = 3{,}29\,\text{cm}$$

E) Model krystalové mřížky

Model v základní poloze

n	ν [°]	(hkl)	d_n [cm]	a_n [cm]
1	17	100	5,626	5,626
2	35	200	2,868	5,736
3	57	300	1,961	5,883

$$2\text{d}\sin\nu = n\lambda \Rightarrow d = \frac{n\lambda}{2\sin\nu}$$

$$d_1 = \frac{n\lambda}{2\sin\nu} = \frac{1\cdot 3{,}29}{2\sin 17°} = 5{,}626\,\text{cm} \qquad a_1 = d_1\sqrt{h^2+k^2+l^2} = 5{,}626\cdot\sqrt{1} = 5{,}626\,\text{cm}$$

$$d_2 = \frac{n\lambda}{2\sin\nu} = \frac{1\cdot 3{,}29}{2\sin 35°} = 2{,}868\,\text{cm} \qquad a_2 = d_2\sqrt{h^2+k^2+l^2} = 2{,}868\cdot\sqrt{4} = 5{,}736\,\text{cm}$$

$$d_1 = \frac{n\lambda}{2\sin\nu} = \frac{1\cdot 3{,}29}{2\sin 57°} = 1{,}961\,\text{cm} \qquad a_1 = d_1\sqrt{h^2+k^2+l^2} = 1{,}961\cdot\sqrt{9} = 5{,}883\,\text{cm}$$

Model pootočený o 45°

n	ν [°]	(hkl)	d_n [cm]	a_n [cm]
1	31	110	3,194	4,517
2	53	220	2,060	5,827

$$d_1 = \frac{n\lambda}{2\sin\nu} = \frac{1\cdot 3{,}29}{2\sin 31°} = 3{,}194\,\text{cm} \qquad a_1 = d_1\sqrt{h^2+k^2+l^2} = 3{,}194\cdot\sqrt{1+1} = 4{,}517\,\text{cm}$$

$$d_2 = \frac{n\lambda}{2\sin\nu} = \frac{1\cdot 3{,}29}{2\sin 53°} = 2{,}060\,\text{cm} \qquad a_2 = d_2\sqrt{h^2+k^2+l^2} = 2{,}060\cdot\sqrt{4+4} = 5{,}827\,\text{cm}$$

$$a = \frac{\sum a_i}{i} = 5{,}52\,\text{cm}$$

Závěr

Vlnová délka vyšla v měření A $3{,}19 \pm 0{,}02\,\mathrm{cm}$, v měření D pak byla $\lambda = 3{,}29\,\mathrm{cm}$. Přesnější hodnota by měla být nalezena při měření A, kdy jsme naměřili více hodnot, ze kterých jsme vlnovou délku počítali.

V následující tabulce jsou naměřené hodnoty indexu lomu a rychlosti šíření elektromagnetických vln v materiálech.

	Plexisklo	Parafín	Textgumoid
$\delta_m\,[°]$	42	36	58
n	1,67	1,56	1,87
$c_2[\mathrm{ms}^{-1}]$	$1{,}80 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}$	$1{,}92 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}$	$1{,}60 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}$

Spočtená hodnota mřížkové konstanty je $a = 5{,}52\,\mathrm{cm}$. Tato hodnota může být značně zkreslená pravděpodobným chybným prvním měřením při modelu otočeném o 45°, neboť je spočtená hodnota značně odchýlená od ostatních.